MA1 cvičení – výpočet primitivních funkcí
(tj. neurčitých integrálů)

(písemné podklady ke cvičení 2.12.20, a možná i ke cvičení dalšímu)

V dnešním a asi i příštím cvičení se budeme věnovat výpočtu „primitivních funkcí" (neboli neurčitým integrálům) – dnes bychom probrali hlavně ty základní cesty k výpočtu primitivních funkcí k daným funkcím (v intervalu) v „jednodušších" případech, příště bychom zkusili integrování „trošku náročnější", také integraci racionální funkce (jednodušší příklady) a ukážeme si několik speciálních substitucí (říká se jim „vhodné" substituce), které pak vedou k integraci funkcí racionálních.

Budeme se snažit ukázat si a vysvětlit na několika příkladech základní „principy" výpočtu primitivních funkcí, a pak bude „dobré", když si sami zkusíte vypočítat některé z dalších příkladů zadaných (pro cvičení), a případné problémy pak můžeme řešit (na cvičení, v Repetitoriu nebo na konzultacích).

Možná, že bude „dobré" si na začátku udělat něco jako „mapu" cest k výpočtu integrálu a k tomu přidat i „rady" (návody), jak (a proč) si vybrat tu „správnou" cestu. A to je podobné, jako bylo rozhodování o způsobu výpočtu limit funkcí – „cesty" jsme znali, ale důležité bylo umět si tu správnou cestu „vybrat"!

Tedy shrnutí (takový „tahák") – stručně o primitivní funkci:

1. Definice: Je-li funkce $f(x)$ definována na intervalu (a,b), pak funkce $F(x)$, pro kterou platí $F'(x) = f(x)$ pro $x \in (a,b)$, se nazývá primitivní funkce k $f(x)$ na (v) intervalu (a,b)

2. Existence primitivní funkce k $f(x)$ (neboli $\int f(x)dx$)

$f(x)$

- spojitá v (a,b) $\Rightarrow$
  $\Rightarrow$ f má v (a,b) funkci primitivní a primitivní funkce jsou právě všechny tvaru $F(x)+C$, $(C \in R)$

- f není spojitá v (a,b) –
  – (nevíme)?? – zajímavé problémy – f nemá, ale i nemusí mít primitivní funkci

f je spojitá v (a,b)

- je mnoho funkcí, spojitých v (a,b), které tedy mají v (a,b) primitivní funkci, ale tyto primitivní funkce nelze vyjádřit pomocí našich známých „elementárních" funkcí –
  – např. e^{-x^2}, $\sin(x^2)$, $\frac{\sin x}{x}$
  a další;

- primitivní funkci $F(x)$ lze vyjádřit pomocí elementárních funkcí –
  – takové „jednodušší" budeme počítat („učitel" má vědět, co „nám" integrovat „půjde")

3. $f(x)$ je spojitá v (a,b) a primitivní lze vyjádřit „pomocí „našich" elementárních funkcí" – jak se dostaneme k cíli – tj. k primitivní funkci $F(x)$ k $f(x)$ v (a,b):

(i) základní důležitá průprava – „tabulka" primitivních funkcí k základním funkcím (nebo tabulka derivací „čtena" pozpátku (v zahraniční literatuře se primitivní fce často říká „antiderivace") – budeme si zde psát „T"

(ii) najít primitivní funkci k f je pak znamená vlastně – najít cestu od zadané funkce na „tabulku" T
(někdy se to zdaří v celém intervalu – to bude dnes, někdy budeme muset interval (a,b) „rozdělit" a pak primitivní funkce z částí „slepit" – později uvidíme.)

(iii) a „mapa" cest (od $f(x)$ k $\int f(x)dx$):

$f(x)$

- „T" → přímo k tabulce, když $f(x)$ je lineární kombinací „tabulkových" funkcí (linearita neurčitého integrálu)
- „S" → substituce (většina) „cesta zpět" od derivace složených funkcí
  - 1VS – „přímá" cesta: pro $\int f(g(x)).g'(x)dx$ – zde důležité odhalit dvojici $g(x)$, $g'(x)$
  - cesta „opačná" – 2VS: $\int f(x)dx$ se nahradí „výrazem" $\int f(g(t)).g'(t)dt$ – ? $g(t)$ – volba je podstatná
- PP → per partes (speciální „cesta") „cesta „zpět" od derivace součinu" (hodí se pro integraci součinu funkcí, z nichž aspoň jednu „umíme" integrovat)

(iv) „substituce" v integrálu (jen formálně naznačeno, neboť s předpoklady jsou v přednášce) –
– spíše návod k „počítání";

1) (*) $\underline{\int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = F(g(x)) + c}$, $x \in (a,b)$ (1VS)

snadné! – když v integrálu „najdeme" dvojici $g(x)$, $g'(x)$ (k tomu je třeba „umět" derivace), pak integrujeme jen vnější funkci, tj.

$\int f(y)dy = F(y)$, a pak zpět k (*)!

2) (**) $\underline{\int f(x)dx}$ – když „neumíme", tak občas pomůže (2VS) „šikovný nápad" – místo (**) integrál

$\int f(g(t)) \cdot g'(t)) = G(t)$ – šikovnost „nápadu nahradit $x \to g(t)$" spočívá v tom, že pak $\int f(g(t))\,g'(t)dt$ je „jednodušší" než ten na začátku (i když napsán tak nevypadá), a když známe $G(t)$, pak

$\underline{\int f(x)dx = F(x) = G(g^{-1}(x))} + c$ (banální užití substituce, náročnější předpoklady na $g(t)$ – viz níže – budeme „počítat" příště

A než se „dáme" do počítání integrálů, ještě dvě poznámky:

1. Při počítání integrálů mohou být substituce i integrace per partes užity opakovaně, a někdy se tyto dvě cesty mohou i spojit a vystřídat – nejprve jdeme cestou per partes a pak pokračujeme substitucí, někdy se jde i obráceně – nejprve substituce, pak per partes – příklady si ukážeme.

2. Jeden „druh" funkcí, o kterých je dokázáno, že primitivní funkce k nim lze vyjádřit funkcemi elementárními, jsou funkce racionální – budeme tedy cvičit jednodušší případy. Ne vždy se ale vyřešit „zdaří", záleží to na tom, zda se podaří najít všechny kořeny polynomu ve jmenovateli příslušné racionální funkce (často „to" dělat neumíme)

3. Poznámka k „zadání" příkladů integrálů pro cvičení (toto i ty další):
integrály" jsou rozděleny do skupin, kde se „dají"
„pak řešit stejným způsobem (a ten je vždy nadepsán) –
– kvůli „tréninku" vidění vlastností integrálu, což pak umožní vybrat na „rozcestí" tu dobrou cestu k cíli (na tabuli).

Příklady výpočtu primitivních funkcí:

1) k funkcím blízko „tabulce":

a) • $\int\left(3e^x + \frac{1}{x}\right)dx$: (i) $f(x) = 3e^x + \frac{1}{x}$ je spojitá v $(-\infty,0)$ i v $(0,+\infty)$ $\Rightarrow$ k f v těchto intervalech existují fce primitivní

(ii) $\int e^x dx$ a $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$ jsou na „tabulce", tak užitím linearity jsme „tam" skoro hned:

$$\int\left(3e^x + \frac{1}{x}\right)dx = 3\int e^x dx + \int \frac{1}{x}dx = 3e^x + \ln|x| + C \quad (C\in\mathbb{R})$$

$x\in(0,+\infty)$, $x\in(-\infty,0)$.

• $$\int\left(5\sqrt{x} + \frac{1}{\cos^2 x}\right)dx = 5\int\sqrt{x}\,dx + \int\frac{1}{\cos^2 x}dx \underset{T}{=} \frac{10}{3}x^{\frac{3}{2}} + \operatorname{tg} x + C \quad (C\in\mathbb{R})$$

$$\left.\begin{array}{l} \int\sqrt{x}\,dx \underset{T}{=} \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C_1, \quad x>0 \\ \int\frac{1}{\cos^2 x}dx = \operatorname{tg} x + C_2, \\ \qquad x\in\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ \qquad k\in\mathbb{Z} \end{array}\right\} \begin{array}{l} x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right) \text{ a} \\ x\in\left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right), k\in\mathbb{N} \end{array}$$

(opět zde funkce spojitá)

• $\int\left(\sqrt[3]{x} + x^5\right)dx$ analogicky

- $$\int \frac{x^3-1}{2x}\,dx = \frac{1}{2}\int \left(x^2-\frac{1}{x}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\int x^2 dx - \int \frac{1}{x}dx\right) \underset{T}{=}$$

musíme trochu cestu na tabulce „připravit"

$$\underset{„T"}{=} \underline{\frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - \ln|x|\right) + c}\,,$$

$x \in (-\infty, 0)$, $x \in (0, +\infty)$

- $$\underline{\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx} = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx = \int 1\,dx - \int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \underline{x - \operatorname{arctg} x + C}$$ $$x \in R$$

trošku horší příprava pro tabulku – ale je to v „tabulkové skupině", tak to „jde"

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2+1-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

- $\underline{\int \frac{x^4}{x^2+1}\,dx}$ – zkuste podobně (sami)

- $$\underline{\int \operatorname{tg}^2 x\,dx} = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\,dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx - \int 1\,dx =$$

$x \in \left((2k-1)\frac{\pi}{2}, (2k+1)\frac{\pi}{2}\right)$, $k \in Z$

$$= \underline{\operatorname{tg} x - x + C}$$

Příklady podrobně „rozepisuji", vy nemusíte (ale měli byste umět váš postup „obhájit").

b) <u>jednoduchý „vzorec" integrálů $\int f(ax+b)\,dx$, $a \neq 0$</u>;

„známe-li $\int f(x)\,dx$ (říkám tomu z legrace „skorotabulka"):

je-li $\int f(x)\,dx = F(x) + c$, pak $\int f(ax+b)\,dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

(předpokládáme, že „vše" je definováno)

$\int f(ax+b)\,dx$ lze řešit substitucí, ale nejspíš, že je to i „vidět", umíme-li derivovat (a víme-li, že $F'(x) = f(x)$ v J)

T:

$$\int e^{-x}dx = \left(\frac{e^{-x}}{(-1)}\right) = -e^{-x} + C, \; x \in R$$ – T: $\int e^x dx = e^x + C$ a zde $a=-1$

$$\int e^{4x-1}dx = \frac{e^{4x-1}}{4} + C, \; x \in R$$ | $\int e^x dx = e^x + C$, $a=4, b=-1$

$$\int \cos(3x+2)dx = \frac{\sin(3x+2)}{3} + C, \; x \in R$$ | T: $\int \cos x\, dx = \sin x$ $(a=3, b=2)$

$$\int \sqrt{3x-2}\, dx = \int (3x-2)^{\frac{1}{2}}dx = \frac{(3x-2)^{3/2}}{3} \cdot \frac{2}{3}, \; x \in \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$ | T: $\int \sqrt{x}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + C$, $a=3, b=-2$

$$\int \frac{1}{5-x}dx = -\ln|5-x| + C, \; x \in (-\infty, 5), x \in (5, +\infty)$$ | T: $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$, $a=-1, b=5$

další příklady z 1. a 2. řádku 1b) jistě zvládnete hravě, tak dále:

$$\int \frac{1}{4+x}dx = \ln|4+x| + C, \quad x \in (-\infty, -4), \; x \in (-4, +\infty),$$

ale! $\int \frac{1}{4+x^2}dx$ nebo $\int \frac{1}{1+4x^2}dx$ vedou na tabulkový integrál $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \operatorname{arctg} x$:

$$\int \frac{1}{1+4x^2}dx = \int \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \frac{\operatorname{arctg}(2x)}{2} + C, \quad a=2, b=0$$

$x \in R$

a • $$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}\,dx = \frac{1}{4}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right)\cdot 2 + c =$$
$$= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{2}\right) + c,\ x\in\mathbb{R} \quad \left(a=\frac{1}{2}\right)$$

(V „lepších" tabulkách bývá i vzorec $\int \frac{1}{a^2+x^2}\,dx = \frac{1}{a}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)+c$, – $a>0$, $x\in\mathbb{R}$

– ale my ho ani nepotřebujeme – umíme bez tabulek ↑)

a ještě lépe („dobré" pro integraci racionálních funkcí – později)

$$\int \frac{1}{x^2+4x+5}\,dx = \int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx = \mathrm{arctg}\,(x+2)+c,\ x\in\mathbb{R}$$
$(a=1$ zde$)$

(pokud máme $\int \frac{1}{x^2+px+q}\,dx$, kde $p^2-4q<0$ (tj. jmenovatel nemá reálné kořeny), pak na tabulku je cílem $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$ vždy!)

a $\int \frac{1}{x^2+4x+8}\,dx$ – zkuste sami!

• a ještě integrály, jejichž cíl na tabulku je $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + C$, $x\in(-1,1)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1-(3x)^2}}\,dx = \frac{\arcsin(3x)}{3}+c,\quad x\in\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$
$(a=3, b=0)$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x^2}}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{3}\right)^2}}\,dx = \frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)\cdot\frac{1}{\frac{1}{3}} + c =$$

$x\in(-3,3)$ $$= \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+c \quad \left(a=\frac{1}{3}\right)$$

A jistě je ve skupině integrál, který „nevypadá", že patří mezi ty vyřešené:

- $$\underline{\int \sin^2 x\,dx} \underset{(*)}{=} \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{1}{2}\int(1-\cos 2x)dx = \underline{\frac{1}{2}\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)+C}$$

ale lze užít vyjádření $\sin^2 x = \dfrac{1-\cos 2x}{2}$ (analog. $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$) –

– odvodí se ze vzorce $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$,

a pak už je možné (*)

$\int \cos^2 x\,dx$ už jistě „vidíte".

2. <u>Věta o substituci:</u>

<u>užití pro integrál</u>

$$\begin{cases} \text{Je-li } \int f(y)dy = F(y)+C, \text{ pak } " \\ (*) \int f(g(x))\cdot g'(x)dx = F(g(x)) + C \end{cases}$$

(značení vždy je v přednášce, i v zadání příkladu pro cvičení)
s předpoklady

<u>A jak?</u> hledáme dvojici $g(x)$, $g'(x) \leftrightarrow g(x)$ je vnitřní funkce v nějaké „složené" funkci, a pokud je tato složená funkce vynásobena $g'(x)$ – pak integrace je „vidět" – je to přímo výsledek derivace složené funkce $F(g(x))$, kde $\underline{F(y)=f(y)}$, tedy – stačí „umět" integrovat jen vnější funkci (pouze se „říká", že děláme substituci – jako

$g(x) = y$)

Důležité je tedy derivace „umět", nebo lépe „vidět", dohromady spolu s funkcí $g(x)$ – tj. „vidět" dvojici $\underline{g(x), g'(x)}$ v daném integrálu.

Příklady:

- $\int 2x e^{x^2} dx = \int e^{x^2} (x^2)' dx = e^{x^2} + C, \quad x \in \mathbb{R}$

integrujeme tedy „jen" $\int e^y dy = e^y$ a složíme s $y = x^2$

složíme s $y = \sin x$

$$\int e^{\sin x} \cdot \cos x \, dx = e^{\sin x} + C, \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= \int e^{\sin x} (\sin x)' dx =$$

A jistě vidíte „návod": $\int e^{(*)} (*)' dx = e^{(*)} + C$

Může se stát, že derivace $g'(x)$ fce $g(x)$ v integrálu $(*)$ není „celá", „chybí" konstanta – tu pak můžeme dále lineárně „dodat":

- $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} dx = 2 \int e^{\sqrt{x}} (\sqrt{x})' dx$

$$\left| \begin{array}{l} g(x) = \sqrt{x} \\ g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array} \right|$$

$$= 2 e^{\sqrt{x}} + C, \quad x \in (0, +\infty)$$

a teď integrujeme opět „jen" $\int e^y dy = e^y + C$ a pak (dle něj)

Podobně

- $\int \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}} dx$ (zkuste)

Další příklady:

(pokud už jste něco o substituci slyšeli dříve na střední škole, vím, že jste určitě zapisovali jinak – já zatím uvádím zápis „z přednášky", ukážeme si to třeba později)

- $$\underbrace{\int \frac{\ln^2 x}{x}\,dx}_{x\in(0,+\infty)} = \underbrace{\int (\ln x)^2\cdot(\ln x)'}_{\substack{\text{(zpravidla, není třeba psát)}\\ \text{– ukazuji „návod"}}} = \underline{\frac{\ln^3 x}{3} + C}$$

tj. $g(x)=\ln x$ a ($:= y$)

počítáme jen

$$\int y^2\,dy = \frac{y^3}{3} + C \quad \text{a „zpět"}$$

nebo (stejná substituce $\ln x = y$)

- $$\underline{\int \frac{1}{x(1+\ln^2 x)}\,dx} = \int \frac{1}{1+(\ln x)^2}(\ln x)'\,dx = \operatorname{arctg}(\ln x) + C \qquad x\in(0,+\infty)$$

zde opět $g(x)=\ln x$

$$\int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \operatorname{arctg} y + C$$

(Často se integrace zapisují takto:

$$\int \frac{1}{1+\ln^2 x}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \left|\begin{matrix}\ln x = y\\ \frac{1}{x}\,dx = dy\end{matrix}\right| = \int \frac{1}{1+y^2}\,dy = \operatorname{arctg} y + C$$

$$= \operatorname{arctg}(\ln x) + C$$

– není tento zápis asi úplně „korektní", ale užívá se a budeme jej používat

- $\int e^x \sin(e^x)\,dx = -\cos(e^x) + c, \quad x\in\mathbb{R}$

$$\left| \begin{array}{l} g(x)=e^x \quad (=y) \\ g'(x)=e^x \end{array} \right| =$$

$$= \int \sin y\,dy = -\cos y + c$$

- $\int \frac{e^x}{e^{2x}+2e^x+2}\,dx = \operatorname{arctg}(e^x+1)+c, \quad x\in\mathbb{R}$

stejně: $g(x)=e^x$, tj. $\left|\begin{array}{l} e^x=y\\ e^x dx = dy\end{array}\right| =$

$$=\int \frac{1}{y^2+2y+2}\,dy \underset{\text{(cvičení)}}{=} \int\frac{1}{(y+1)^2+1}\,dy = \operatorname{arctg}(y+1)+c, \quad y\in\mathbb{R}$$

- $\int \cos^3 x\cdot \sin x\,dx = -\int (\cos x)^3(-\sin x)\,dx = -\frac{\cos^4 x}{4}+c, \quad x\in\mathbb{R}$

$$\left|\begin{array}{l} g(x)=\cos x\\ g'(x)=-\sin x\end{array}\right| =$$

$$=-\int y^3\, dy = \frac{-y^4}{4}+c$$

? ale

- (*) $\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x\cdot \sin x\,dx = \int(1-\cos^2x)\sin x\,dx =$

(i „to" jde)

$$= \int \sin x\,dx + \int \cos^2 x(-\sin x)\,dx =$$

$$= -\cos x + \frac{\cos^3 x}{3} + c, \quad x\in\mathbb{R}$$

A důležitý (a užitečný) typ integrálu (předpokládáme, že platí to, co je „třeba")

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)}\,dx = \ln|g(x)| + c, \quad g'(x) \text{ je spojitá v } I,\ g(x) \neq 0 \text{ v } I$$

VS $\left(\;|\, g(x) = y,\quad g'(x)\,dx = dy \,|\right.$

$$\int \frac{1}{y}\,dy = \ln|y| + c$$

Příklady:

$$\int \frac{2x}{4+x^2}\,dx = \ln(4+x^2) + C,\ x \in R \qquad \left((4+x^2)' = 2x\right)$$

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\int \frac{4x^3}{1+x^4}\,dx = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + C,\ x \in R \qquad \left((1+x^4)' = 4x^3\right)$$

$$\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx = \ln(x^2+4x+5) + c,\ x \in R \qquad \left(\underbrace{(x^2+4x+5)}_{>0\ \forall x \in R}{}' = 2x+4\right)$$

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x+5} = \;?$$

$x-3 \neq (x^2+4x+5)'$, ale zařídí se to" a upraví tak, že umíme integrál „spočítat :

$$\int \frac{x-3}{x^2+4x+5}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+4}{x^2+4x+5}\,dx - 5\int \frac{1}{(x+2)^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+4x+5) - 5\,\mathrm{arctg}\,(x+2) + c,\quad x \in R$$

(důležitá „část" integrace racionální funkce)

Zkusme nyní další příklady užití substituce, ukážeme si ještě:
<u>užití integrace per partes (čtení „pozadu" vzorce pro derivaci součinu:</u>

$$(fg)' = f'g + fg' \qquad \Big| \int \qquad \left(\int f' = f + c\right)$$

$$fg = \int f'g + \int fg' \text{, tj. odtud}$$

<u>Vzorec:</u> $$\underline{\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx}$$

(f', g' spojité v (a,b))

umožňuje pro součin dvou funkcí, z nichž aspoň jednu „umíme" integrovat – proto „per partes":

<u>Příklady:</u>

$\underline{\int x.\sin x\,dx = ?}$ (aspoň víme, že integrál existuje v R!)

„umíme" integrovat obě funkce – $\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + C$
$\int \sin x\,dx = -\cos x + C$,

ale snažíme se získat užitím integrace per partes integrál $\int f(x)g'(x)\,dx$, který není „horší" než ten na začátku – což by se stalo, pokud bychom integrovali „x" – tedy užijeme $g(x) = x$, $f(x) = \sin x$, tedy

$$\underline{\int x\sin x\,dx} = \begin{vmatrix} f'(x) = \sin x, & f(x) = -\cos x \\ g(x) = x, & g'(x) = 1 \end{vmatrix} \underset{PP}{=} -\cos x . x - \int(-\cos x)\,dx =$$

$$= -x.\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C,\ x \in R$$

• $\underline{\int x^3 \ln x \, dx} = \left| \begin{array}{l} f'(x) = x^3 \to f(x) = \frac{x^4}{4} \\ g(x) = \ln x \to g'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right| =$

„zatím" umíme „$(\ln x)'$", ne $\int \ln x \, dx$,

tedy výběr „jasný" – snad ho dole „dopadne"

$$= \frac{x^4}{4}\ln x - \int \frac{x^4}{4}\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{1}{4}\int x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16} + c$$

$x \in (0,+\infty),\ c \in R$

• $\underline{\int x^2 \cos x \, dx} = \left| \begin{array}{l} f' = \cos x,\ f = \sin x \\ g = x^2,\ g' = 2x \end{array} \right| \underset{pp}{=} x^2 \sin x - 2\int x \sin x \, dx =$

budeme se snažit „likvidovat x^2" – tj. integrace pp. $2x$!

$= \left| \begin{array}{l} f' = \sin x,\ f = -\cos x \\ g = x,\ g' = 1 \end{array} \right| =$

$$= x^2 \sin x - 2\left(-x\cos x - \int(-\cos x)\,dx\right) = x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C$$

$x \in R$

A dva speciální případy: (další „finty")

1) $\underline{\int \ln x \, dx} \underset{ale}{=} \int 1 . \ln x \, dx = \left| \begin{array}{l} f' = 1,\ f = x \\ g = \ln x,\ g' = \frac{1}{x} \end{array} \right| \underset{pp}{=}$

(jen jedna fce!)

$$= x \ln x - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1} dx = x \ln x - x + c,$$

$x \in (0,+\infty)$!

2) nepodaří se „lepší" integrál, ale stejný, který byl „na začátku" – a pak hledaný integrál bude řešením rovnice pro tento integrál I.

$$\int \sin^2 x\,dx = \left|\begin{matrix} f' = \sin x, & f = -\cos x \\ g = \sin x, & g' = \cos x \end{matrix}\right| = -\sin x.\cos x + \int \cos^2 x\,dx$$

(volba je tady „jasná")

$$= \left|\begin{matrix} f' = \cos x & f = \sin x \\ g = \cos x & g' = -\sin x \end{matrix}\right| = -\sin x.\cos x + \sin x.\cos x - \int -\sin^2 x\,dx, \text{ tj.}$$

zkusme ještě jednou integraci pp (což jsme tak úspěšně dělali)

výsledek: $\int \sin^2 x\,dx = \int \sin^2 x\,dx$,

což je pravda, ale pořád integrál nemáme –

tak jak? vrátíme-li se o jednu integraci zpět, máme:

$$\int \sin^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int \cos^2 x\,dx = -\sin x\cos x + \int (1-\sin^2 x)\,dx$$

$$= -\sin x.\cos x + x - \int \sin^2 x\,dx, \quad \text{a odtud:}$$

$$2\int \sin^2 x\,dx = x - \sin x\cos x + C \implies$$

$$\underline{\int \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(x - \sin x\cos x) + C}, \quad x \in \mathbb{R} \qquad \nabla$$

A dále přehledné integrály, a zkuste mi napsat, co byste potřebovali ještě „vyjasnit", děkuji.